Cap. 1 Técnicas de Resolução em Otimização Combinatória
aula 4

SIMO/MQDEE

MARIA CÂNDIDA MOURÃO

(cmourao@iseg.ulisboa.pt)

Cap. 1 Técnicas de Resolução em Otimização Combinatória

Cap. 1 – Técnicas de Resolução em Otimização Combinatória

- 1.1 Introdução
- 1.2 Relaxações
- 1.3 Resolução exata de problemas
  - Algoritmo de *branch-and-bound*
  - Algoritmo de planos de corte
- 1.4 Utilização de software

Bibliografia

- F.S. Hillier; G.J. Lieberman, Introduction to Operations Research, 9th ed., McGraw-Hill, 2009.
- L. Wolsey, Integer Programming, John Wiley & Sons, 1998.

Otimização Inteira

Branch & Cut

- Técnicas:
  - Pré-processamento de Problemas
  - Geração de Planos de Corte
  - *Branch & Cut*
- Pré-processamento
  - Objetivo – arranjar formulações mais simples por inspeção da inicial
  - Técnicas:
    1. Fixação de Variáveis (sem eliminar SA's)
    2. Eliminação de restrições redundantes
    3. "Apertar" restrições – reduzir a RA do PLR sem eliminar SA do PLI

Programação Binária!

Otimização Inteira

PLB

1. Fixação de Variáveis

Ex. a)

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1, x_2 \in \{0,1\} \end{cases}$$

Ex. b)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 1 \\ x_1, x_2, x_3 \in \{0,1\} \end{cases}$$

Ex. c)

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 2 \\ x_1, x_2, x_3 \in \{0,1\} \end{cases}$$

Ex. d)

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 2 \\ x_1, x_2, x_3 \in \{0,1\} \end{cases}$$

Ex. e)

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 3x_3 \geq 2 \\ x_1, x_2, x_3 \in \{0,1\} \end{cases}$$

Otimização Inteira

PLB

- Ao fixar o valor de uma variável devemos substitui-la pelo seu valor em toda a formulação!

Ex.:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 2 \\ x_1 + x_4 + x_5 \leq 1 \\ -x_5 + x_6 \leq 0 \\ x_j \in \{0,1\}; \quad j = 1, \dots, 6 \end{cases}$$

Otimização Inteira

Branch & Cut

2. Restrições Redundantes

Ex. a)

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_1, x_2 \in \{0,1\} \end{cases}$$

Ex. b)

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 0 \\ x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}_0^+ \end{cases}$$

CPLEX $\rightarrow$ pré-processamento automático
elimina variáveis
elimina restrições redundantes

Otimização Inteira

Branch & Cut

3. "Apertar" Restrições

Ex.: $Max\ z = 3x_1 + 2x_2$

s.a: $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2 \in \{0,1\} \end{cases}$

PLR $Max\ z = 3x_1 + 2x_2$

s.a: $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$

RA =

Otimização Inteira

Branch & Cut

Algoritmo: "Apertar" restrição

0. Dada uma restrição de "≤": $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \leq b$ e $x_j \in \mathbf{B}, \ \forall j$
1. Calcular: $S = \sum_{j:a_j>0} a_j$
2. Se $\exists\, a_k$: $S < b + |a_k|$ ir para 3

   C.c. FIM (a restrição já não pode ser alterada)
3. Se $a_k > 0$ fazer: $a_k' = S - b$; $b' = S - a_k$; $a_k = a_k'$; $b = b'$

   C.c. fazer: $a_k = b - S$
4. Voltar a 1

Ex: Aplicar este algoritmo ao exemplo anterior!

Otimização Inteira - PLB

Branch & Cut

Ex.: "Apertar" as restrições:

i) $4x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 5$

ii) $3x_1 - x_2 + 4x_3 \geq 1$

- Geração de cortes

Seja: $\sum_j a_j x_j \leq b$ com $a_j \geq 0, \forall j$

- Encontrar um grupo de variáveis – cobertura mínima – na restrição tal que:
  - a) A restrição seja violada se todas assumem valor unitário
  - b) A validade da restrição mantém-se se uma só qualquer das variáveis for nula
  - c) Sendo S o conjunto de variáveis na restrição que verificam (a) e (b),

    e $|S| = N$, introduzir a restrição: $\sum_k x_k \leq N - 1$

Ex.: iii) $4x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 \leq 8$

Otimização Inteira

Branch & Cut

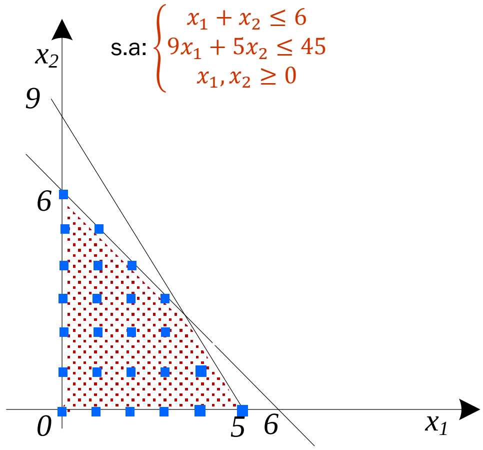
Cortes em PLI

Ex.: $Max\ z = 8x_1 + 5x_2$

$$\text{s.a:} \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 6 \\ 9x_1 + 5x_2 \leq 45 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_0^+ \end{cases}$$

PLR $Max\ z = 8x_1 + 5x_2$

$$\text{s.a:} \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 6 \\ 9x_1 + 5x_2 \leq 45 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$



RA

$\mathbf{x}^* =$

Otimização Inteira

Branch & Cut

Cortes em PLI

$$\begin{cases} Z - 8x_1 - 5x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 9x_1 + 5x_2 + x_4 = 45 \end{cases} \Leftrightarrow$$

Escrever o sistema com VB:
$x_1,\ x_2$ e Z

. . .

Otimização Inteira

Branch & Cut

Cortes em PLI

$$\begin{cases} x_1 - \frac{5}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 = \frac{15}{4} \notin \mathbb{Z} \\ x_3 = 6 - x_1 - x_2 \\ x_4 = 45 - 9x_1 - 5x_2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

. . . Separando a parte inteira da fracionária

Corte: parte fracionária ≤ 0

Otimização Inteira

Branch & Cut

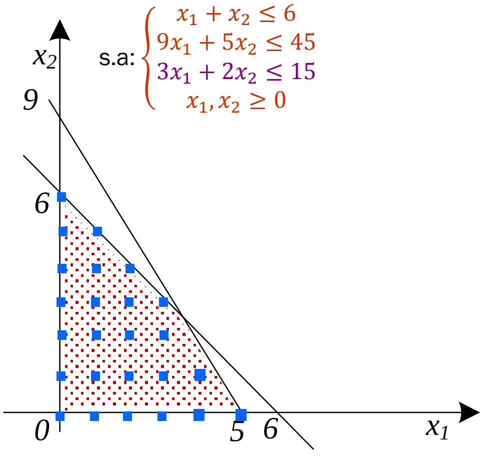
Cortes em PLI

Ex.: $Max\ z = 8x_1 + 5x_2$

s.a: $\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 6 \\ 9x_1 + 5x_2 \leq 45 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_0^+ \end{cases}$

PLR $Max\ z = 8x_1 + 5x_2$

s.a: $\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 6 \\ 9x_1 + 5x_2 \leq 45 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 15 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$



RA

$\mathbf{x}^* = (5,0)$

Solver

Otimização Inteira

Trabalho 3

A. Encontrar dois cortes de cobertura mínima para a restrição em PLB:

$$6x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 10$$

B. Aplicar os métodos aprendidos ao seguinte PLB por forma a obter um problema equivalente com menos restrições funcionais. Se possível, identifique uma SO sem resolver o problema.

$$\text{Max } z = x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 + 2x_6 + 2x_7 + x_8 + 3x_9$$

$$\text{s. a: } \begin{cases} 3x_2 + x_4 + x_5 \geq 3 \\ x_1 + x_2 \leq 1 \\ -x_2 - x_4 + x_5 + x_6 \geq 1 \\ x_2 + 2x_6 + 3x_7 + x_8 + 2x_9 \geq 4 \\ -x_3 + 2x_5 + x_6 + 2x_7 - 2x_8 + x_9 \leq 5 \\ x_j \in \{0,1\}\ \forall j \end{cases}$$

C. Considere o seguinte PLI:

$$\text{Min } z = 6x_1 + 8x_2$$

$$\text{s. a: } \begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 4 \\ x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_0^+ \end{cases}$$

Obtenha o valor ótimo da relaxação linear após a introdução de um corte (planos de corte), escolhendo a variável fracionária de menor índice e compare esse valor com o valor que obteria se resolvesse o PLI dado. Sem resolver, explique se seria necessário introduzir novo corte e como procederia em caso afirmativo.